## EJERCICIOS PROPUESTOS

**6.1 Halla el valor numérico de la fracción $\dfrac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 6x + 8}$ para los valores 2, 0 y 4.**

Para 2: $\dfrac{2^2 - 7 \cdot 2 + 10}{2^2 - 6 \cdot 2 + 8} = \dfrac{0}{0}$. Valor indeterminado.

Para 0: $\dfrac{0^2 - 7 \cdot 0 + 10}{0^2 - 6 \cdot 0 + 8} = \dfrac{10}{8} = \dfrac{5}{4}$.

Para 4: $\dfrac{4^2 - 7 \cdot 4 + 10}{4^2 - 6 \cdot 4 + 8} = \dfrac{-2}{0}$. No existe valor numérico.

**6.2 Indica si estas fracciones tienen valor numérico para los valores que anulan el denominador.**

**a)** $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 4}$

**b)** $\dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$

a) El denominador se anula para $x = 4$. Para este valor, el numerador vale $4^2 - 5 \cdot 4 + 6 = 2$. No existe valor numérico para $x = 4$.

b) El denominador se anula para $x = 3$. Para este valor, el numerador vale $3^2 - 9 = 0$. Así que el valor de la fracción algebraica para $x = 3$ es indeterminado.

**6.3 Comprueba si son equivalentes las siguientes fracciones: $\dfrac{x + 1}{x}$ y $\dfrac{x^2 - 1}{x^2 - x}$.**

Dos fracciones son equivalentes si el producto de medios es igual al producto de extremos. De modo que se tiene que cumplir que $(x + 1)(x^2 - x) = x(x^2 - 1)$.

$(x + 1)(x^2 - x) = x^3 - x^2 + x^2 - x = x^3 - x$

$x(x^2 - 1) = x^3 - x$

Las fracciones dadas son equivalentes.

**6.4 Escribe tres fracciones equivalentes a $\dfrac{x + 1}{x^2 - 1}$.**

$\dfrac{x + 1}{x^2 - 1} = \dfrac{x + 1}{(x + 1)(x - 1)}$ es equivalente a $\dfrac{1}{x - 1}, \dfrac{x}{x^2 - x}, \dfrac{x + 3}{(x - 1)(x + 3)}$

**6.5 Simplifica las siguientes fracciones.**

**a)** $\dfrac{x^2 + 1}{x^4 - 1}$

**b)** $\dfrac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 8x + 15}$

a) $\dfrac{x^2 + 1}{x^4 - 1} = \dfrac{x^2 + 1}{(x^2 + 1)(x^2 - 1)} = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

b) Factorizando cada una de sus partes tenemos que $\dfrac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 8x + 15} = \dfrac{(x - 1)(x - 5)}{(x - 3)(x - 5)} = \dfrac{x - 1}{x - 3}$.

6.6 **Simplifica $\frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$ y calcula el valor numérico para $x = 2$.**

Factorizamos numerador y denominador: $\frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \frac{(x - 1)(x^2 + x - 1)}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$.

Si $x = 2$, $\frac{2^2 + 2 + 1}{2 + 1} = \frac{7}{3}$

6.7 **Opera estas fracciones.**

**a)** $\frac{7x}{x^3 + 5} + \frac{6x + 1}{x^3 + 5}$

**b)** $\frac{3xy}{x - y} - \frac{1 - 2xy}{x - y}$

a) $\frac{7x}{x^3 + 5} + \frac{6x + 1}{x^3 + 5} = \frac{7x + 6x + 1}{x^3 + 5} = \frac{13x + 1}{x^3 + 5}$

b) $\frac{3xy}{x - y} - \frac{1 - 2xy}{x - y} = \frac{3xy - (1 + 2xy)}{x - y} = \frac{xy - 1}{x - y}$

6.8 **Efectúa las siguientes operaciones.**

**a)** $\frac{7x + 3}{x - 4} + \frac{5x}{x^2 - 16}$

**b)** $\frac{2x}{x - 5} - \frac{x + 2}{x - 1}$

a) $\frac{7x + 3}{x - 4} + \frac{5x}{x^2 - 16} = \frac{(7x + 3)(x + 4)}{(x - 4)(x + 4)} + \frac{5x}{x^2 - 16} = \frac{7x^2 + 36x + 12}{x^2 - 16}$

b) $\frac{2x}{x - 5} - \frac{x + 2}{x - 1} = \frac{2x(x - 1) - (x + 2)(x - 5)}{(x - 5)(x - 1)} = \frac{2x^2 - 2x - x^2 + 3x + 10}{x^2 - 6x + 5} = \frac{x^2 + x + 10}{x^2 - 6x + 5}$

6.9 **Realiza estas operaciones: $\frac{1}{x + 2} - \frac{1}{x - 2} + \frac{4}{x^2 - 4}$.**

$\frac{1}{x + 2} - \frac{1}{x - 2} + \frac{4}{x^2 - 4} = \frac{(x - 2) - (x + 2) + 4}{x^2 - 4}$

6.10 **Realiza las siguientes operaciones con fracciones: $\frac{x}{x - 1} + \frac{2}{x + 2} + \frac{x + 1}{x - 2}$.**

$\frac{x}{x - 1} + \frac{2}{x + 2} - \frac{x + 1}{x - 2} = \frac{x(x + 2)(x - 2) + 2(x - 1)(x - 2) - (x + 1)(x - 1)(x + 2)}{(x - 1)(x + 2)(x - 2)} = \frac{-9x + 6}{x^3 - x^2 - 4x + 4}$

6.11 **Calcula estos productos.**

**a)** $\frac{x + 1}{x} \cdot \frac{x - 1}{x + 2}$

**b)** $\frac{2x - 1}{x - 3} \cdot \frac{x^2 - x + 1}{2x^2 - 4}$

a) $\frac{x + 1}{x} \cdot \frac{x - 1}{x + 2} = \frac{(x + 1)(x - 1)}{x(x + 2)} = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x}$

b) $\frac{2x - 1}{x - 3} \cdot \frac{x^2 - x + 1}{2x^2 - 4} = \frac{(2x - 1)(x^2 - x + 1)}{(x - 3)(2x^2 - 4)} = \frac{2x^3 - 3x^2 + 3x + 1}{2x^3 - 6x^2 - 4x + 12}$

6.12 **Efectúa el producto y simplifica el resultado: $\frac{x^2}{x + 1} \cdot \frac{x^2 - 1}{x^3}$.**

$\frac{x^2}{x + 1} \cdot \frac{x^2 - 1}{x^3} = \frac{x^2(x^2 - 1)}{(x + 1)x^3} = \frac{x^2(x + 1)(x - 1)}{(x + 1)x^3} = \frac{x - 1}{x}$

**6.13 Opera estos cocientes.**

**a)** $\dfrac{4x+7}{x^2} : \dfrac{3x+1}{x+5}$ **b)** $\dfrac{5x-1}{3x-1} : \dfrac{x^2-1}{2x^2+3}$

a) $\dfrac{4x+7}{x^2} : \dfrac{3x+1}{x+5} = \dfrac{4x+7}{x^2} \cdot \dfrac{x+5}{3x+1} = \dfrac{(4x+7)(x+5)}{x^2(3x+1)} = \dfrac{4x^2+27x+35}{3x^3+x^2}$

b) $\dfrac{5x-1}{3x-1} : \dfrac{x^2-1}{2x^2+3} = \dfrac{5x-1}{3x-1} \cdot \dfrac{2x^2+3}{x^2-1} = \dfrac{(5x-1)(2x^2+3)}{(3x-1)(x^2-1)} = \dfrac{10x^3-2x^2+15x-3}{3x^3-x^2-3x+1}$

**6.14 Calcula este cociente y simplifica el resultado:** $\dfrac{x}{x^2-36} : \dfrac{12x^2}{x-6}$

$\dfrac{x}{x^2-36} : \dfrac{12x^2}{x-6} = \dfrac{x}{x^2-36} \cdot \dfrac{x-6}{12x^2} = \dfrac{x(x-6)}{12x^2(x-6)(x+6)} = \dfrac{1}{12x(x+6)}$

**6.15 Calcula el valor numérico para $x = 2$ de cada expresión radical.**

**a)** $\sqrt{-x^2}$ **b)** $\sqrt[3]{-x^3}$ **c)** $\sqrt{(-x)^2}$ **d)** $\sqrt[3]{(-x)^3}$

a) $\sqrt{-2^2} = \sqrt{-4}$, no existe.

b) $\sqrt[3]{-2^3} = \sqrt[3]{-8} = -2$

c) $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$

d) $\sqrt[3]{(-2)^3} = \sqrt[3]{-8} = -2$

**6.16 Comprueba que las siguientes expresiones radicales no son equivalentes.**

**a)** $\sqrt{x^4}$ **y** $\sqrt[3]{x^{12}}$ **b)** $\sqrt{x^6}$ **y** $\sqrt[3]{x^6}$

a) $\sqrt{x^4} = x^{\frac{4}{2}} = x^2 \neq x^4 = x^{\frac{12}{3}} = \sqrt[3]{x^{12}}$

b) $\sqrt{x^6} = x^{\frac{6}{2}} = x^3 \neq x^2 = x^{\frac{6}{3}} = \sqrt[3]{x^6}$

**6.17 Un alumno dice que los radicales $\sqrt{x^4}$ y $\sqrt[3]{x^6}$ son iguales.**

**a) ¿Es cierta esta afirmación?**

**b) ¿Y si los radicales son $\sqrt{x^4}$ y $\sqrt[4]{x^8}$?**

a) Sí, $\sqrt{x^4} = x^{\frac{4}{2}} = x^2 = x^{\frac{6}{3}} = \sqrt[3]{x^6}$

b) Sí, $\sqrt{x^4} = x^{\frac{4}{2}} = x^2 = x^{\frac{8}{4}} = \sqrt[4]{x^8}$

**6.18 Simplifica estos radicales.**

**a)** $\sqrt[4]{x^6}$ **b)** $\sqrt[8]{a^4}$ **c)** $\sqrt[6]{x^3}$ **d)** $\sqrt[12]{y^8}$

a) $\sqrt[4]{x^6} = x^{\frac{6}{4}} = x^{\frac{3}{2}} = \sqrt{x^3}$

b) $\sqrt[8]{a^4} = a^{\frac{4}{8}} = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$

c) $\sqrt[6]{x^3} = x^{\frac{3}{6}} = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$

d) $\sqrt[12]{y^8} = y^{\frac{8}{12}} = y^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{y^2}$

**6.19 Simplifica estos radicales hasta conseguir un radical irreducible.**

**a)** $\sqrt[18]{x^{12}y^{36}z^6}$ **b)** $\sqrt[45]{x^{15}y^{30}z^{15}}$

a) $\sqrt[18]{x^{12}y^{36}z^6} = \sqrt[\frac{18}{6}]{x^{\frac{12}{6}}y^{\frac{36}{6}}z^{\frac{6}{6}}} = \sqrt[3]{x^2y^6z}$

b) $\sqrt[45]{x^{15}y^{30}z^{15}} = \sqrt[\frac{45}{15}]{x^{\frac{15}{15}}y^{\frac{30}{15}}z^{\frac{15}{15}}} = \sqrt[3]{xy^2z}$

6.20 **Reduce a índice común estos radicales.**

**a)** $\sqrt[15]{ab},\ \sqrt[5]{ab},\ \sqrt[3]{ab}$

**b)** $\sqrt[3]{x^2y},\ \sqrt[9]{x^7y^2},\ \sqrt[6]{xy^2}$

a) $\sqrt[15]{ab}$

$\sqrt[5]{ab} = \sqrt[5\cdot 3]{(ab)^3} = \sqrt[15]{a^3b^3}$

$\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3\cdot 5]{(ab)^5} = \sqrt[15]{a^5b^5}$

b) $\sqrt[3]{x^2y} = \sqrt[3\cdot 6]{(x^2y)^6} = \sqrt[18]{x^{12}y^2}$

$\sqrt[9]{x^7y^2} = \sqrt[9\cdot 2]{(x^7y^2)^2} = \sqrt[18]{x^{14}y^4}$

$\sqrt[6]{xy^2} = \sqrt[6\cdot 3]{(xy^2)^3} = \sqrt[18]{x^3y^6}$

6.21 **Realiza las siguientes operaciones.**

**a)** $\sqrt[3]{x^2y} \cdot \sqrt[3]{x^2y}$

**b)** $\sqrt[4]{x^7y^3} : \sqrt[4]{xy^2}$

**c)** $\left(\sqrt[3]{x^3y}\right)^2$

**d)** $\sqrt[3]{\sqrt{xy^3}}$

a) $\sqrt[3]{x^2y} \cdot \sqrt[3]{x^2y} = (x^2y)^{\frac{1}{3}}\,(x^2y)^{\frac{1}{3}} = (x^2y)^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} = (x^2y)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(x^2y)^2} = \sqrt[3]{x^4y^2}$

b) $\sqrt[4]{x^7y^3} : \sqrt[4]{xy^2} = (x^7y^3)^{\frac{1}{4}} : (xy^2)^{\frac{1}{4}} = (x^7y^3 : xy^2)^{\frac{1}{4}} = (x^6y)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{x^6y}$

c) $\left(\sqrt[3]{x^3y}\right)^2 = \sqrt[3]{(x^3y)^2} = \sqrt[3]{x^6y^2}$

d) $\sqrt[3]{\sqrt{xy^3}} = \sqrt[3\cdot 2]{xy^3} = \sqrt[6]{xy^3}$

6.22 **Efectúa estas operaciones.**

**a)** $\sqrt[5]{x^2y} \cdot \sqrt[5]{x^3y} : \sqrt[5]{x^2y}$

**b)** $\sqrt[3]{\sqrt{x^5}} : \sqrt[6]{x^2} \cdot \left(\sqrt[6]{x}\right)^4$

a) $\sqrt[5]{x^2y} \cdot \sqrt[5]{x^3y} : \sqrt[5]{x^2y} = \sqrt[5]{(x^2y) \cdot (x^3y) : (x^2y)} = \sqrt[5]{x^3y}$

b) $\sqrt[3]{\sqrt{x^5}} : \sqrt[6]{x^2} \cdot \left(\sqrt[6]{x}\right)^4 = \sqrt[3\cdot 2]{x^5} : \sqrt[6]{x^2} \cdot \sqrt[6]{x^4} = \sqrt[6]{x^5 : x^2 \cdot x^4} = \sqrt[6]{x^7}$

6.23 **Extrae factores de estos radicales.**

**a)** $\sqrt[7]{x^{15}y^7z^{22}}$

**b)** $\sqrt[3]{x^9y^{10}zt^7}$

**c)** $\sqrt[5]{x^{10}y^{11}z^{12}t^{13}}$

a) $\sqrt[7]{x^{15}y^7z^{22}} = \sqrt[7]{x^7x^7xy^7z^7z^7z^7z} = x^2yz^3 \cdot \sqrt[7]{xz}$

b) $\sqrt[3]{x^9y^{10}zt^7} = \sqrt[3]{x^3x^3x^3y^3y^3y^3yzt^3t^3t} = x^3y^3t^2 \cdot \sqrt[3]{yzt}$

c) $\sqrt[5]{x^{10}y^{11}z^{12}t^{13}} = \sqrt[5]{x^5x^5y^5y^5yz^5z^5z^2t^5t^5t^3} = x^2y^2z^2t^2 \cdot \sqrt[5]{yz^2t^3}$

6.24 **Calcula estas sumas de radicales.**

**a)** $\sqrt{x^3y^3} - \sqrt{xy^5} + \sqrt{x^3y}$

**b)** $\sqrt[4]{x^4y^5} + \sqrt[4]{x^8y} - \sqrt[4]{y^9}$

a) $\sqrt{x^3y^3} - \sqrt{xy^5} + \sqrt{x^3y} = xy\sqrt{xy} - y^2\sqrt{xy} + x\sqrt{xy} = (xy - y^2 + x)\sqrt{xy}$

b) $\sqrt[4]{x^4y^5} + \sqrt[4]{x^8y} - \sqrt[4]{y^9} = xy\sqrt[4]{y} + x^2\sqrt[4]{y} - y^2\sqrt[4]{y} = (xy + x^2 - y^2)\sqrt[4]{y}$

**6.25 Realiza estos cálculos.**

**a)** $\sqrt[5]{x^2y^3} \cdot \sqrt[5]{xy^4}$

**b)** $\sqrt[3]{ab^2} \cdot \sqrt[6]{a^4b}$

**c)** $\sqrt[6]{x^2y^3} : \sqrt[4]{xy^2}$

**d)** $\sqrt{a^3b} : \sqrt[6]{a^5}$

a) $\sqrt[5]{x^2y^3} \cdot \sqrt[5]{xy^4} = \sqrt[5]{x^3y^7} = y\sqrt[5]{x^3y^2}$

b) $\sqrt[3]{ab^2} \cdot \sqrt[6]{a^4b} = \sqrt[6]{(ab^2)^2} \cdot \sqrt[6]{a^4b} = \sqrt[6]{a^6b^5} = a\sqrt[6]{b^5}$

c) $\sqrt[6]{x^2y^3} : \sqrt[4]{xy^2} = \sqrt[12]{(x^2y^3)^2} : \sqrt[12]{(xy^2)^3} = \sqrt[12]{x}$

d) $\sqrt{a^3b} : \sqrt[6]{a^5} = \sqrt[6]{(a^3b)^3} : \sqrt[6]{a^5} = \sqrt[6]{a^4b^3}$

**6.26 Efectúa las siguientes operaciones.**

**a)** $\sqrt{\sqrt{ab}} \cdot \left(\sqrt{ab^2}\right)^3 \cdot \sqrt[3]{b}$

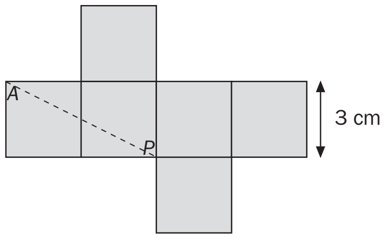
**b)** $\sqrt[5]{xy^2} \cdot \left(\sqrt[3]{xy}\right)^2 : \sqrt[15]{xy}$

a) $\sqrt{\sqrt{ab}} \cdot \left(\sqrt{ab^2}\right)^3 \cdot \sqrt[3]{b} = \sqrt[4]{ab} \cdot \left(\sqrt{ab^2}\right)^3 \cdot \sqrt[3]{b} = \sqrt[12]{a^3b^3 \cdot a^{18}b^{36} \cdot b^4} = \sqrt[12]{a^{21}b^{43}} = ab^3\sqrt[12]{a^9b^7}$

b) $\sqrt[5]{xy^2} \cdot \left(\sqrt[3]{xy}\right)^2 : \sqrt[15]{xy} = \sqrt[5]{xy^2} \cdot \sqrt[3]{x^2y^2} : \sqrt[15]{xy} = \sqrt[15]{x^3y^6 \cdot x^{10}y^{10} : xy} = \sqrt[15]{x^{12}y^{15}} = y\sqrt[15]{x^{12}}$

## RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

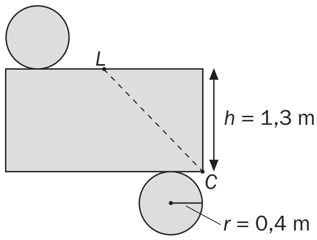
**6.27 ¿Cuál es la distancia mínima que tiene que recorrer la araña para salir del cubo de la figura?**




La distancia mínima es la línea recta que une los dos puntos, que coincide con la diagonal del rectángulo de altura 3 cm y base 6 cm.

$l^2 = 3^2 + 6^2 = 9 + 36 = 45 \Rightarrow l = \sqrt{45} = 6,71$ cm

**6.28 ¿Cuál es la distancia mínima que tiene que recorrer el caracol para comerse la lechuga?**




$(LO)^2 = h^2 + \left(\frac{2\pi r}{2}\right)^2 = 1,3^2 + \pi^2 \cdot 0,4^2 = 3,27 \Rightarrow LO = 1,8$

El caracol debe recorrer 1,8 metros para comerse la lechuga.

EJERCICIOS PARA ENTRENARSE

## Fracciones algebraicas equivalentes

**6.29 Determina el valor numérico de estas fracciones algebraicas para $x = 1$ e $y = -2$.**

**a)** $\dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$ **b)** $\dfrac{3x + 2y}{x + y}$ **c)** $\dfrac{4x^2y}{5x + y}$

a) $\dfrac{2 \cdot 1 \cdot (-2)}{1^2 + (-2)^2} = -\dfrac{4}{5}$ b) $\dfrac{3 \cdot 1 + 2 \cdot (-2)}{1 + (-2)} = 1$ c) $\dfrac{4 \cdot 1^2(-2)}{5 \cdot 1 + (-2)} = -\dfrac{8}{3}$

**6.30 Halla los valores de $x$ para los cuales el valor numérico de la fracción algebraica $\dfrac{x^3 - 7x - 6}{x^2 - x - 6}$ es indeterminado.**

Las raíces del denominador 3 y $-2$. Vemos qué ocurre con estos valores cuando los sustituimos en el numerador.

Si $x = 3$, $\dfrac{3^3 - 7 \cdot 3 - 6}{3^2 - 3 - 6} = \dfrac{0}{0}$. Indeterminado

Si $x = -2$, $\dfrac{(-2)^3 - 7 \cdot (-2) - 6}{(-2)^2 - (-2) - 6} = \dfrac{0}{0}$. Indeterminado

**6.31 Simplifica las siguientes fracciones algebraicas.**

**a)** $\dfrac{x + 1}{x^2 - 1}$ **c)** $\dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 + 2x - 3}$

**b)** $\dfrac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - 4}$ **d)** $\dfrac{x^2 - x - 2}{x^5 - x^4 - 2x^3}$

a) $\dfrac{x + 1}{x^2 - 1} = \dfrac{x + 1}{(x + 1)(x - 1)} = \dfrac{1}{x - 1}$

c) $\dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 + 2x - 3} = \dfrac{(x - 1)(x + 2)}{(x - 1)(x + 3)} = \dfrac{x + 2}{x + 3}$

b) $\dfrac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - 4} = \dfrac{(x + 2)^2}{(x + 2)(x - 2)} = \dfrac{x + 2}{x - 2}$

d) $\dfrac{x^2 - x - 2}{x^5 - x^4 - 2x^3} = \dfrac{x^2 - x - 2}{x^3(x^2 - x - 2)} = \dfrac{1}{x^3}$

**6.32 Reduce a común denominador estas fracciones algebraicas.**

$$\frac{x - 1}{x + 2} \qquad \frac{x + 1}{x - 2} \qquad \frac{3x}{x^2 + 2x - 8}$$

$$\frac{x - 1}{x + 2} = \frac{(x - 1)(x - 2)(x + 4)}{(x + 2)(x - 2)(x + 4)} = \frac{x^3 + x^2 - 10x + 8}{x^3 + 4x^2 - 4x - 16}$$

$$\frac{x + 1}{x - 2} = \frac{(x + 1)(x + 2)(x + 4)}{(x - 2)(x + 2)(x + 4)} = \frac{x^3 + 7x^2 + 14x + 8}{x^3 + 4x^2 - 4x - 16}$$

$$\frac{3x}{x^2 + 2x - 8} = \frac{3x}{(x + 4)(x - 2)} = \frac{3x(x + 2)}{(x^2 + 2x - 8)(x + 2)} = \frac{3x^2 + 6x}{x^3 + 4x^2 - 4x - 16}$$

**6.33 Indica qué pares de fracciones algebraicas son equivalentes.**

a) $\dfrac{x+1}{x-1}$ y $\dfrac{x^3+x^2-2x-2}{x^3-x^2-2x+2}$ b) $\dfrac{x}{2x-1}$ y $\dfrac{x^2+x}{2x^2-3x+1}$ c) $\dfrac{(x-3)^2}{x^2-9}$ y $\dfrac{x^2-3x+9}{(x-3)\cdot(x+3)}$

a) Sí son equivalentes, tanto el numerador como el denominador de la segunda coinciden con el de la primera multiplicados por $(x^2-2)$.

b) No son equivalentes. Si $x=2$, $\dfrac{2}{2\cdot 2-1}=\dfrac{2}{3}$ y $\dfrac{2^2+2}{2\cdot 2^2-3\cdot 2+1}=\dfrac{6}{3}=2$.

c) No son equivalentes. El denominador de la segunda es la factorización del denominador de la primera, y en los numeradores no se establece la relación de igualdad porque el numerador del segundo no coincide con el desarrollo del numerador de la primera fracción.

## Operaciones con fracciones algebraicas

**6.34 Opera y simplifica las siguientes fracciones algebraicas.**

a) $\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}$ b) $\dfrac{a-2}{a+2}+\dfrac{a+2}{a-2}$

a) $\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{x(x+1)+(x-1)}{x^2-1}=\dfrac{x^2+x+x-1}{x^2-1}=\dfrac{x^2+2x-1}{x^2-1}$

b) $\dfrac{a-2}{a+2}+\dfrac{a+2}{a-2}=\dfrac{(a-2)^2+(a+2)^2}{a^2-4}=\dfrac{a^2-4a+4+a^2+4a+4}{a^2-4}=\dfrac{2a^2+8}{a^2-4}$

**6.35 Opera y simplifica, reduciendo previamente a común denominador.**

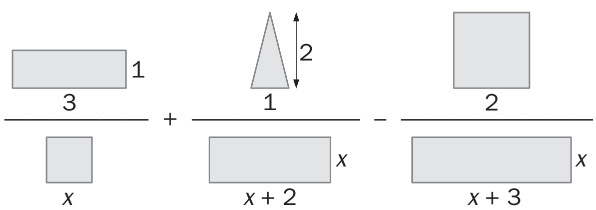
a) $\dfrac{x}{x-2}+\dfrac{2x+1}{x+2}-\dfrac{1}{x^2-4}$ b) $\dfrac{1}{3x^2-3}-\dfrac{2}{2x+2}+\dfrac{x+5}{x+1}$ c) $\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{3x-1}{x-3}$

a) $\dfrac{x}{x-2}+\dfrac{2x+1}{x+2}-\dfrac{1}{x^2-4}=\dfrac{x(x+2)+(2x+1)(x-2)-1}{x^2-4}=\dfrac{3x^2-x-3}{x^2-4}$

b) $\dfrac{1}{3x^2-3}-\dfrac{2}{2x+2}+\dfrac{x+5}{x+1}=\dfrac{1}{3(x^2-1)}-\dfrac{2}{2(x+1)}+\dfrac{x+5}{x+1}=\dfrac{2-2\cdot 3(x-1)+6(x+5)(x-1)}{6(x^2-1)}=\dfrac{3x^2+9x-11}{3(x^2-1)}$

c) $\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{3x-1}{x-3}=\dfrac{x(x+2)(x-3)-(x-1)(x-3)+(3x-1)(x+2)}{(x-1)(x+2)(x-3)}=\dfrac{4x^3-9x-1}{x^3-2x^2-5x+6}$

**6.36 Opera y simplifica las siguientes fracciones algebraicas, calculando previamente las áreas de las figuras geométricas que aparecen en los numeradores y en los denominadores.**




$$\dfrac{3\cdot 1}{x^2}+\dfrac{\dfrac{1\cdot 2}{2}}{x(x+2)}-\dfrac{2\cdot 2}{x(x+3)}=\dfrac{3(x+2)(x+3)+x(x+3)-4x(x+2)}{x^2(x+2)(x+3)}=\dfrac{10x+18}{x^4+5x^3+6x^2}$$

**6.37 Realiza estas operaciones y simplifica el resultado.**

**a)** $\dfrac{x+1}{x^2+2x} \cdot \dfrac{4x+3x^3}{x^2+x}$

**b)** $\dfrac{x-2}{x^2-9} : \dfrac{x^2-4}{x+3}$

a) $\dfrac{x+1}{x^2+2x} \cdot \dfrac{4x+3x^3}{x^2+x} = \dfrac{(x+1)(4x+3x^3)}{(x^2+2x)(x^2+x)} = \dfrac{(x+1)x(4+3x^2)}{x(x+2)x(x+1)} = \dfrac{4+3x^2}{x(x+2)}$

b) $\dfrac{x-2}{x^2-9} : \dfrac{x^2-4}{x+3} = \dfrac{(x-2)(x+3)}{(x^2-9)(x^2-4)} = \dfrac{1}{(x-3)(x+2)}$

**6.38 Opera y simplifica.**

**a)** $\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2x} - \dfrac{1}{3x}\right) : \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2x}\right)$

**b)** $\left[\left(x + \dfrac{1}{x}\right) : \left(x - \dfrac{1}{x}\right)\right] \cdot (x-1)$

**c)** $\left(\dfrac{x+1}{(x-1)^2} \cdot \dfrac{x^2-1}{x}\right) : \left(\dfrac{x+1}{(x-1)^2}\right)$

a) $\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2x} - \dfrac{1}{3x}\right) : \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2x}\right) = \left(\dfrac{1}{6x}\right) : \left(\dfrac{2-2}{2x^2}\right) = \dfrac{2x^2}{6x(2-x)} = \dfrac{x}{6-3x}$

b) $\left[\left(x + \dfrac{1}{x}\right) : \left(x - \dfrac{1}{x}\right)\right] \cdot (x-1) = \left[\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right) : \left(\dfrac{x^2-1}{x}\right)\right] \cdot (x-1) = \dfrac{(x^2+1)x}{(x^2-1)x} \cdot (x-1) = \dfrac{x^2+1}{x+1}$

c) $\left(\dfrac{x+1}{(x-1)^2} \cdot \dfrac{x^2-1}{x}\right) : \left(\dfrac{x+1}{(x-1)^2}\right) = \dfrac{(x+1)(x^2-1)}{(x-1)^2 x} : \dfrac{x+1}{(x-1)^2} = \dfrac{(x+1)^2}{(x-1)x} : \dfrac{x+1}{(x-1)^2} = \dfrac{(x+1)^2(x-1)^2}{(x+1)(x-1)x} = \dfrac{x^2-1}{x}$

## Expresiones radicales equivalentes

**6.39 Halla el valor numérico de estas expresiones radicales para los valores $x = 2$ e $y = 1$.**

**a)** $\sqrt{\dfrac{2xy}{x^2+y^2}}$ **b)** $\sqrt{x^3y^2+5}$ **c)** $\sqrt{2x+3y-1}$

a) $\sqrt{\dfrac{2 \cdot 2 \cdot 1}{2^2+1^2}} = \sqrt{\dfrac{4}{5}}$ b) $\sqrt{2^3 \cdot 1^2 + 5} = \sqrt{13}$ c) $\sqrt{2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 - 1} = \sqrt{6}$

**6.40 Calcula las posibles raíces de estas expresiones radicales.**

**a)** $\sqrt{144x^4}$ **c)** $\sqrt[3]{64x^6}$

**b)** $\sqrt{81x^4}$ **d)** $\sqrt[5]{32x^{25}}$

a) $\sqrt{144x^4} = \pm 12x^2$ c) $\sqrt[3]{64x^6} = 4x^2$

b) $\sqrt{81x^4} = \pm 9x^2$ d) $\sqrt[5]{32x^{25}} = 2x^5$

**6.41 Indica qué pares de expresiones radicales son equivalentes.**

**a)** $\sqrt{4x^2}$ **y** $-\sqrt[3]{8x^3}$ **b)** $\sqrt[3]{8x^6}$ **y** $\sqrt[9]{512x^{18}}$ **c)** $\sqrt{9x^4}$ **y** $\sqrt[4]{81x^{12}}$

a) No lo son, para $x = 1$, $\sqrt{4 \cdot 1^2} = 2$ (cuando no se indica el signo, se considera signo positivo), y $-\sqrt[3]{8 \cdot 1^3} = -2$.

b) Sí, ya que $\sqrt[3 \cdot 3]{(8x^6)^2} = \sqrt[9]{512x^{18}}$

c) No, ya que $\sqrt{9x^4} = \sqrt[2 \cdot 2]{(9x^4)^2} = \sqrt[4]{81x^8} \neq \sqrt[4]{81x^{12}}$

**6.42 Escribe tres radicales equivalentes a cada uno de los siguientes.**

**a)** $\sqrt[4]{x^2y^8}$ **b)** $\sqrt[3]{ab}$

a) $\sqrt[4]{x^2y^8} = \sqrt{xy^4} = \sqrt[8]{x^4y^{16}} = \sqrt[6]{x^3y^{12}}$

b) $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[9]{a^3b^3} = \sqrt[15]{a^5b^5} = \sqrt[21]{a^7b^7}$

**6.43 Reduce estos radicales a índice común:** $\sqrt[3]{x^2}$ $\sqrt{x^3}$ $\sqrt[6]{x^5}$

$\sqrt[3]{x^2} = \sqrt[6]{x^4}$ $\sqrt{x^3} = \sqrt[6]{x^9}$ $\sqrt[6]{x^5}$

**6.44 Simplifica los siguientes radicales.**

**a)** $\sqrt[16]{a^8b^4}$ **c)** $\sqrt[15]{x^{12}y^{18}}$

**b)** $\sqrt[12]{(x^2y^2)^3}$ **d)** $\sqrt[20]{(x^2y^4)^5}$

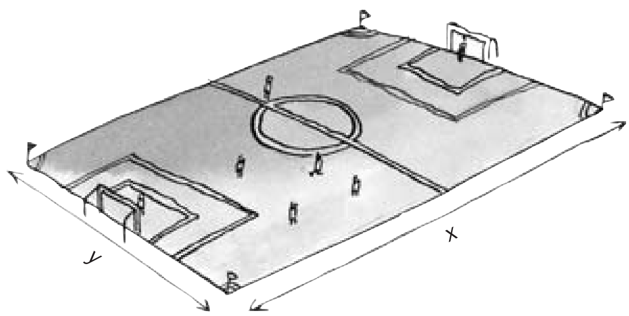
a) $\sqrt[16]{a^8b^4} = \sqrt[4]{a^2b}$

c) $\sqrt[15]{x^{12}y^{18}} = \sqrt[5]{x^4y^6}$

b) $\sqrt[12]{(x^2y^2)^3} = \sqrt{xy}$

d) $\sqrt[20]{(x^2y^4)^5} = \sqrt{xy^2}$

**6.45 Utilizando el teorema de Pitágoras, calcula la diagonal del campo de fútbol.**




**Si $x = 100$ metros e $y = 80$ metros, ¿cuál sería la longitud de dicha diagonal?**

$d = \sqrt{x^2 + y^2}$ · Si $x = 100$ metros e $y = 80$ metros; $d = \sqrt{100^2 + 80^2} = 10\sqrt{164} = 20\sqrt{41}$ metros

## Operaciones con expresiones radicales

**6.46 Realiza estas operaciones con radicales.**

**a)** $\sqrt{\sqrt{x^{12}y^6}}$ **c)** $\sqrt[3]{x^2y} \cdot \sqrt[3]{x^4y^2}$

**b)** $\sqrt{x^5y} : \sqrt{xy}$ **d)** $\left(\sqrt{xy}\right)^4$

a) $\sqrt{\sqrt{x^{12}y^6}} = \sqrt[4]{x^{12}y^6} = x^3y\sqrt{y}$

c) $\sqrt[3]{x^2y} \cdot \sqrt[3]{x^4y^2} = \sqrt[3]{x^6y^3} = x^2y$

b) $\sqrt{x^5y} : \sqrt{xy} = \sqrt{x^5y : xy} = \sqrt{x^4} = x^2$

d) $\left(\sqrt{xy}\right)^4 = \sqrt{x^4y^4} = x^2y^2$

**6.47 Extrae factores de los siguientes radicales.**

**a)** $\sqrt[4]{64x^8}$ **b)** $\sqrt[3]{x^4yz^5}$ **c)** $\sqrt{\dfrac{16a^6}{b^3}}$

a) $\sqrt[4]{64x^8} = \sqrt[4]{2^6x^8} = 2x^2\sqrt[4]{4}$

b) $\sqrt[3]{x^4yz^5} = xz\sqrt[3]{xyz^2}$

c) $\sqrt{\dfrac{16a^6}{b^3}} = \sqrt{\dfrac{2^4 \cdot a^6}{b^3}} = \dfrac{4a^3}{b}\sqrt{\dfrac{1}{b}} = \dfrac{4a^3}{b\sqrt{b}}$

**6.48 Efectúa estas operaciones con expresiones radicales.**

**a)** $\sqrt[3]{x^2} : \sqrt{x^3}$ **b)** $\sqrt{x^2y^3} \cdot \sqrt[5]{xy}$ **c)** $\sqrt{x^3} \cdot \sqrt[3]{x^2}$ **d)** $\sqrt[3]{xy^2} : \sqrt[4]{x^3y^5}$

a) $\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x^3}} = \dfrac{\sqrt[6]{x^4}}{\sqrt[6]{x^9}} = \sqrt[6]{\dfrac{x^4}{x^9}} = \sqrt[6]{\dfrac{1}{x^5}} = \dfrac{1}{\sqrt[6]{x^5}}$

b) $\sqrt{x^2y^3} \cdot \sqrt[5]{xy} = \sqrt[10]{x^{10}y^{15}} \cdot \sqrt[10]{x^2y^2} = \sqrt[10]{x^{12}y^{17}} = xy\sqrt[10]{x^2y^7}$

c) $\sqrt{x^3} \cdot \sqrt[3]{x^2} = \sqrt[6]{x^9} \cdot \sqrt[6]{x^4} = \sqrt[6]{x^{13}} = x^2\sqrt[6]{x}$

d) $\dfrac{\sqrt[3]{xy^2}}{\sqrt[4]{x^3y^5}} = \dfrac{\sqrt[12]{x^4y^8}}{\sqrt[12]{x^9y^{15}}} = \sqrt[12]{\dfrac{1}{x^5y^7}} = \dfrac{1}{\sqrt[12]{x^5y^7}}$

**6.49 Opera las siguientes expresiones radicales.**

**a)** $\sqrt{12x} + \sqrt{75x} - \sqrt{27x} + \sqrt{48x}$

**b)** $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{ab^3} + \sqrt[3]{ab^6} - \sqrt[3]{ab^9}$

**c)** $5\sqrt{xy^2} + \sqrt{16x^3y^4} - \sqrt{9xy^6}$

a) $\sqrt{12x} + \sqrt{75x} - \sqrt{27x} + \sqrt{48x} = \sqrt{2^2 \cdot 3x} + \sqrt{5^2 \cdot 3x} - \sqrt{3^3x} + \sqrt{2^4 \cdot 3x} = 8\sqrt{3x}$

b) $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{ab^3} + \sqrt[3]{ab^6} - \sqrt[3]{ab^9} = (1 - b + b^2 - b^3)\sqrt[3]{a}$

c) $5\sqrt{xy^2} + \sqrt{16x^3y^4} - \sqrt{9xy^6} = (5y + 4xy^2 - 3y^3)\sqrt{x}$

**6.50 Realiza estas operaciones.**

**a)** $\sqrt[3]{xy^3} \cdot \sqrt{xy} \cdot \sqrt[4]{x^5y}$ **b)** $\dfrac{\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[5]{x^3}}{\sqrt[6]{x^4}}$

a) $\sqrt[3]{xy^3} \cdot \sqrt{xy} \cdot \sqrt[4]{x^5y} = \sqrt[12]{(xy^3)^4(xy)^6(x^5y)^3} = \sqrt[12]{x^{25}y^{21}} = x^2y\sqrt[12]{xy^9}$

b) $\dfrac{\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[5]{x^3}}{\sqrt[6]{x^4}} = \dfrac{\sqrt[15]{x^5 \cdot x^9}}{\sqrt[3]{x^2}} = \sqrt[15]{\dfrac{x^{14}}{x^{10}}} = \sqrt[15]{x^4}$

## CUESTIONES PARA ACLARARSE

6.51 **¿Puede ser que el resultado obtenido al calcular el valor numérico de una expresión algebraica sea otra expresión algebraica? Razona tu respuesta.**

No, porque al calcular el valor numérico de una expresión algebraica resulta un número, no una expresión algebraica.

6.52 **Indica los casos en los que sea necesario factorizar una fracción algebraica para calcular el valor numérico para algún valor en concreto. Pon algún ejemplo.**

Cuando tenemos el caso de indeterminada $\frac{0}{0}$.

Por ejemplo, $\frac{x+1}{x^2-1}$ para $x = -1$. Tenemos $\frac{0}{0}$. Si factorizamos, podemos simplificar, $\frac{x+1}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{x-1}$, sustituimos $x = -1$ y nos da como resultado $-\frac{1}{2}$.

6.53 **Indica si las siguientes igualdades son verdaderas o falsas, justificando tu respuesta.**

**a)** $\sqrt{(x+a)\cdot(x-a)} = x - a$

**b)** $\frac{\sqrt{x+y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = 1$

a) Falsa. $\sqrt{(x+a)(x-a)} = \sqrt{x^2 - a^2} \neq x - a$

b) Falsa. $\sqrt{x+y} \neq \sqrt{x} + \sqrt{y}$

6.54 **¿Qué debe verificar el índice de la raíz de una expresión algebraica positiva para obtener dos soluciones al calcular dicha raíz? Explícalo con ejemplos.**

El índice ha de ser un número par. Por ejemplo: $\sqrt{4x^2} = 2x$ y $-2x$

6.55 **¿Existe siempre la raíz cuadrada de la raíz cúbica de una expresión algebraica? Justifica tu respuesta con algún ejemplo.**

No, por ejemplo, $\sqrt{\sqrt[3]{x}}$ no existe si $x < 0$.

6.56 **Tenemos un rectángulo cuya base y altura son *x* e *y*, respectivamente. Obtenemos otro rectángulo cuyos lados tienen doble longitud. ¿La longitud de la diagonal del nuevo rectángulo también es el doble? Razona la respuesta.**

$D = \sqrt{(2x)^2 + (2y)^2} = \sqrt{4x^2 + 4y^2} = \sqrt{4(x^2 + y^2)} = 2\sqrt{x^2 + y^2}$

La longitud de la diagonal del nuevo rectángulo mide el doble que la del rectángulo inicial.

6.57 **En una expresión radical de índice *n*, ¿por cuánto hemos de dividir el radicando para que la expresión radical quede dividida por 2?**

$\sqrt[n]{\frac{x}{2^n}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{2^n}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{2} \Rightarrow$ hemos de dividir por $2^n$

PROBLEMAS PARA APLICAR

6.58 **Realiza las siguientes operaciones utilizando expresiones algebraicas.**

**a) El cociente entre un número y su siguiente más el cociente entre dicho número y su anterior.**

**b) El cociente entre dos números pares consecutivos más el cociente entre dos números impares consecutivos.**

**c) La suma de los inversos de dos pares consecutivos.**

**d) La suma de los inversos de dos números impares consecutivos.**

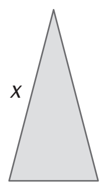
a) $\frac{x}{x+1} + \frac{x}{x-1}$

b) $\frac{2x}{2x+2} + \frac{2x+1}{2x+3}$

c) $\frac{1}{2x} + \frac{1}{2x+2}$

d) $\frac{1}{2x+1} + \frac{1}{2x+3}$

6.59 **Expresa, mediante una fracción algebraica, el área del triángulo isósceles de la figura.**

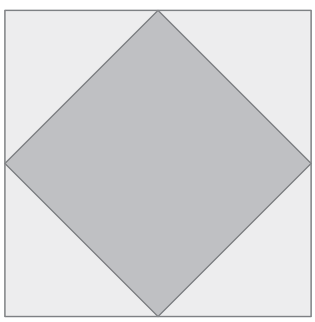



Sea $h$ la altura del triángulo:

$$h = \sqrt{x^2 - \left(\frac{x}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{15x^2}{16}} = \frac{\sqrt{15}x}{4}$$

$$A = \frac{\frac{x}{2} \cdot \frac{\sqrt{15}x}{4}}{2} = \frac{\sqrt{15}x^2}{16}$$

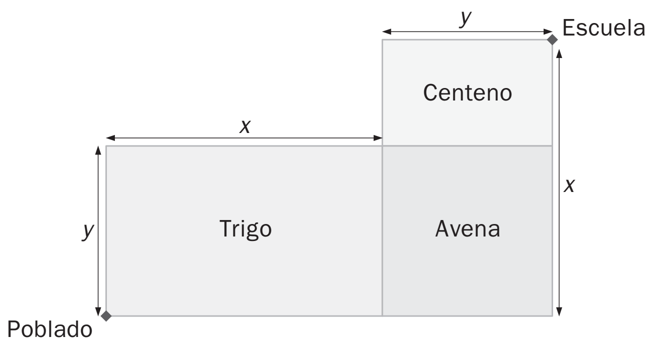
6.60 **Expresa, mediante una fracción algebraica, el área de la parte coloreada.**




Lado del cuadrado coloreado: $l' = \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2l^2}{4}} = \frac{\sqrt{2} \cdot l}{2}$

$$A = \left(\frac{\sqrt{2} \cdot l}{2}\right)^2 = \frac{2l^2}{4} = \frac{l^2}{2}$$

6.61 **Hassan vive en un pequeño poblado de Marruecos y le separan de la escuela tres campos de cultivo de trigo, avena y centeno, como indica la figura.**




**¿Cuál es la expresión algebraica que hace mínimo el trayecto recorrido por Hassan para llegar a la escuela?**

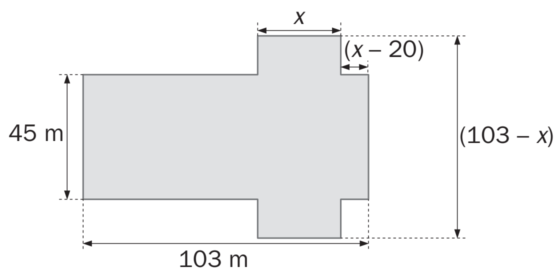
Primero, Hassan recorre la diagonal del campo de trigo: $d_1 = \sqrt{x^2 + y^2}$

Después, la del campo de centeno: $d_2 = \sqrt{y^2 + (x - y)^2} = \sqrt{x^2 + 2y^2 - 2xy}$

La distancia total que recorre Hassan es: $d = \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + 2y^2 - 2xy}$

6.62 **En la fotografía observamos la catedral de Santiago de Compostela.**

**Esta catedral posee una planta en forma de cruz latina como la de la figura.**




**Expresa el área de dicha planta como una expresión algebraica en *x*.**

Dividimos la planta en tres rectángulos (de izquierda a derecha) y calculamos el área de cada uno de ellos.

$A_1 = 45 \cdot [103 - x - (x - 20)] = 45(123 - 2x) = 5\,535 - 90x$

$A_2 = x \cdot (103 - x) = 103x - x^2$

$A_3 = (x - 20) \cdot 45 = 45x - 900$

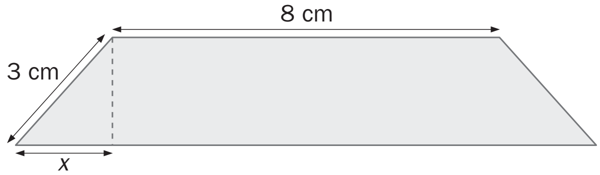
El área total es: $A = A_1 + A_2 + A_3 = 5\,535 - 90x + 103x - x^2 + 45x - 900 = -x^2 + 58x + 4\,635 \text{ m}^2$

6.63 **En el código de circulación, las señales en forma de triángulo indican peligro. La señal de ceda el paso solo difiere de un triángulo equilátero en sus vértices, ya que estos están redondeados.**

**Suponiendo que fuese un triángulo equilátero, expresa el área de la señal si el lado mide *x* centímetros.**

$h = \sqrt{x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3x^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}x}{2} \text{ cm} \qquad A = \frac{x \cdot \frac{\sqrt{3}x}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}x^2}{4} \text{ cm}^2$

6.64 **Expresa el área del siguiente trapecio isósceles.**




Área de cada triángulo: $h = \sqrt{9 - x^2}$ $\quad A = \dfrac{x\sqrt{9 - x^2}}{2}$ cm². Área del rectángulo: $A = 8 \cdot \sqrt{9 - x^2}$ cm²

$$A_T = 2\frac{x\sqrt{9 - x^2}}{2} + 8 \cdot \sqrt{9 - x^2} = (x + 8)\sqrt{9 - x^2} \text{ cm}^2$$

**REFUERZO**

## Fracciones y radicales equivalentes

**6.65 Simplifica estas fracciones algebraicas.**

**a)** $\frac{xy - y}{x - 1}$ **b)** $\frac{x^2 - 4}{2x - 4}$ **c)** $\frac{x - 1}{x^2 + x - 1}$ **d)** $\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + x - 6}$

a) $\frac{xy - y}{x - 1} = \frac{(x - 1)y}{x - 1} = y$

b) $\frac{x^2 - 4}{2x - 4} = \frac{(x + 2)(x - 2)}{2(x - 2)} = \frac{x + 2}{2}$

c) $\frac{x - 1}{x^2 + x - 1}$. No se simplifica.

d) $\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + x - 6} = \frac{(x - 1)(x + 3)}{(x - 2)(x + 3)} = \frac{x - 1}{x - 2}$

**6.66 Simplifica las siguientes expresiones radicales.**

**a)** $\sqrt[15]{x^5y^{20}z^{10}}$ **b)** $\sqrt[3]{x^{14}y^7z^{23}}$ **c)** $\sqrt[12]{a^4b^8c^6}$ **d)** $\sqrt[8]{x^2y^4z^8}$

a) $\sqrt[15]{x^5y^{20}z^{10}} = \sqrt[3]{xy^4z^2}$

b) $\sqrt[3]{x^{14}y^7z^{23}}$. No se puede simplificar.

c) $\sqrt[12]{a^4b^8c^6} = \sqrt[6]{a^2b^4c^3}$

d) $\sqrt[8]{x^2y^4z^8} = \sqrt[4]{xy^2z^4}$

**6.67 Calcula el valor de cada fracción para $x = -2$ y para $x = 1$.**

**a)** $\frac{x^2 - x - 6}{x^2 + 3x + 2}$ **b)** $\frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^2 + x - 2}$

a) $\frac{(-2)^2 - (-2) - 6}{(-2)^2 + 3 \cdot (-2) + 2} = \frac{0}{0}$. Indeterminado.

$\frac{x^2 - x - 6}{x^2 + 3x + 2} = \frac{(x + 2)(x - 3)}{(x + 2)(x + 1)} = \frac{x - 3}{x + 1}$

Sustituimos $x = -2$, $\frac{-2 - 3}{-2 + 1} = 5$.

Sustituimos $x = 1$, $\frac{1 - 3}{1 + 1} = -1$.

b) $\frac{1^3 - 2 \cdot 1^2 - 1 + 2}{1^2 + 1 - 2} = \frac{0}{0}$. Indeterminado.

$\frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^2 + x - 2} = \frac{(x - 1)(x^2 - x - 2)}{(x - 1)(x + 2)} = \frac{x^2 - x - 2}{x + 2}$

Sustituimos $x = -2$, $\frac{(-2)^2 - (-2) - 2}{-2 + 2} = \frac{6}{0}$. No existe valor numérico.

Sustituimos $x = 1$, $\frac{1^2 - 1 - 2}{1 + 2} = -\frac{2}{3}$.

**6.68 ¿Cuál de las siguientes expresiones radicales no es equivalente a $\sqrt[3]{xy^2z}$?**

**a)** $\sqrt[6]{x^2y^4z^2}$ **b)** $\sqrt[9]{x^3y^6z^2}$ **c)** $\sqrt[12]{x^4y^8z^4}$

La *b*, porque $\sqrt[3]{xy^2z} = \sqrt[9]{x^3y^6z^3} \neq \sqrt[9]{x^3y^6z^2}$

**6.69 ¿Cuál de estas fracciones algebraicas no es equivalente a $\frac{x^3 + 5x^2 + 6x}{x^4 + 2x^3 - 3x^2}$?**

**a)** $\frac{x^2 + 2x}{x^2(x - 1)}$ **b)** $\frac{x^2 + 3x}{x^2 \cdot (x - 1)}$ **c)** $\frac{x + 2}{x^2 - x}$

$\frac{x^3 + 5x^2 + 6x}{x^4 + 2x^3 - 3x^2} = \frac{x(x^2 + 5x + 6)}{x^2(x^2 + 2x - 3)} = \frac{x(x + 2)(x + 3)}{x^2(x - 1)(x + 3)}$

La fracción no equivalente es la b.

## Operaciones con fracciones algebraicas

**6.70** **Realiza las operaciones.**

**a)** $\frac{3x}{x-5} + \frac{2x-1}{x+2}$ **b)** $\frac{2x-1}{x^2-4} - \frac{3x-1}{x-2}$ **c)** $\frac{2x-1}{3x} \cdot \frac{x+2}{x^2-3x+1}$ **d)** $\frac{x^2-x+1}{x^3} : \frac{4x-7}{x+1}$

a) $\frac{3x}{x-5} + \frac{2x-1}{x+2} = \frac{3x(x+2)+(2x-1)(x-5)}{(x-5)(x+2)} = \frac{5x^2-5x+5}{x^2-3x-10}$

b) $\frac{2x-1}{x^2-4} - \frac{3x-1}{x-2} = \frac{2x-1-(3x-1)(x+2)}{x^2-4} = \frac{-3x^2-3x+1}{x^2-4}$

c) $\frac{2x-1}{3x} \cdot \frac{x+2}{x^2-3x+1} = \frac{(2x-1)(x+2)}{3x(x^2-3x+1)} = \frac{2x^2+3x-2}{3x^3-9x^2+3x}$

d) $\frac{x^2-x+1}{x^3} : \frac{4x-7}{x+1} = \frac{(x^2-x+1)(x+1)}{x^3(4x-7)} = \frac{x^3+1}{4x^4-7x^3}$

**6.71** **Opera y simplifica.**

**a)** $\left(\frac{x+2}{x-2} - \frac{x-2}{x+2}\right) \cdot \left(x - \frac{4}{x}\right)$ **b)** $\left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x-1}\right) : \left(\frac{1}{x} + \frac{x}{x-1}\right)$

a) $\left(\frac{x+2}{x-2} - \frac{x-2}{x+2}\right) \cdot \left(x - \frac{4}{x}\right) = \frac{(x+2)^2-(x-2)^2}{x^2-4} \cdot \frac{x^2-4}{x} = 8$

b) $\left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x-1}\right) : \left(\frac{1}{x} + \frac{x}{x-1}\right) = \frac{x-1-x^2}{x(x-1)} : \frac{x-1+x^2}{x(x-1)} = \frac{-x^2+x-1}{x^2+x-1}$

## Operaciones con expresiones radicales

**6.72** **Realiza las operaciones.**

**a)** $\sqrt[3]{xy} \cdot \sqrt[3]{x^2y}$ **c)** $\sqrt[3]{x^2y} \cdot \sqrt[5]{x^4y^3}$ **e)** $\left(\sqrt[4]{x^2y^3}\right)^3$

**b)** $\sqrt[5]{x^2y} : \sqrt[5]{xy}$ **d)** $\sqrt[6]{\sqrt[3]{xy}}$ **f)** $\sqrt[3]{x^4y} : \sqrt[9]{x^3y^2}$

a) $\sqrt[3]{xy} \cdot \sqrt[3]{x^2y} = \sqrt[3]{xy \cdot x^2y} = x\sqrt[3]{y^2}$

b) $\sqrt[5]{x^2y} : \sqrt[5]{xy} = \sqrt[5]{x^2y : xy} = \sqrt[5]{x}$

c) $\sqrt[3]{x^2y} \cdot \sqrt[5]{x^4y^3} = \sqrt[15]{x^{10}y^5x^{12}y^9} = x\sqrt[15]{x^7y^{14}}$

d) $\sqrt[6]{\sqrt[3]{xy}} = \sqrt[6\cdot 3]{xy} = \sqrt[18]{xy}$

e) $\left(\sqrt[4]{x^2y^3}\right)^3 = \sqrt[4]{(x^2y^3)^3} = xy^2\sqrt[4]{x^2y}$

f) $\sqrt[3]{x^4y} : \sqrt[9]{x^3y^2} = \sqrt[9]{x^{12}y^3 : x^3y^2} = x\sqrt[9]{y}$

**6.73** **Extrae factores de los siguientes radicales.**

**a)** $\sqrt[5]{x^{17}y^7}$ **b)** $\sqrt[7]{x^{22}y^8}$ **c)** $\sqrt[6]{x^{12}y^3}$ **d)** $\sqrt{x^{13}y^4}$

a) $\sqrt[5]{x^{17}y^7} = x^3y\sqrt[5]{x^2y^2}$

b) $\sqrt[7]{x^{22}y^8} = x^3y\sqrt[7]{xy}$

c) $\sqrt[6]{x^{12}y^3} = x^2\sqrt[6]{y^3}$

d) $\sqrt{x^{13}y^4} = x^6y^2\sqrt{x}$

**6.74** **Calcula estas sumas de radicales.**

**a)** $\sqrt{4x} - 3\sqrt{x^5} + x\sqrt{x^3}$ **b)** $\sqrt[4]{x^5} + \sqrt[4]{x^9} - \sqrt[4]{x}$

a) $\sqrt{4x} - 3\sqrt{x^5} + x\sqrt{x^3} = 2\sqrt{x} - 3x^2\sqrt{x} + x^2\sqrt{x} = (2-2x^2)\sqrt{x}$

b) $\sqrt[4]{x^5} + \sqrt[4]{x^9} - \sqrt[4]{x} = x\sqrt[4]{x} + x^2\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{x} = (x^2+x-1)\sqrt[4]{x}$

AMPLIACIÓN

6.75 **Opera y simplifica.**

a) $\dfrac{\sqrt[4]{a^3b^2}\cdot\sqrt[3]{a^4b^5}}{\sqrt[6]{a^5b^4}\cdot\sqrt{ab}}$

b) $\dfrac{\sqrt[4]{x^2y^3}\cdot\sqrt[6]{x^4y^6}}{\sqrt[10]{x^3y^2}}$

a) $\dfrac{\sqrt[4]{a^3b^2}\cdot\sqrt[3]{a^4b^5}}{\sqrt[6]{a^5b^4}\cdot\sqrt{ab}}=\dfrac{\sqrt[12]{(a^3b^2)^3(a^4b^5)^4}}{\sqrt[12]{(a^5b^4)^2(ab)^6}}=\sqrt[12]{\dfrac{a^{25}b^{26}}{a^{16}b^{14}}}=\sqrt[12]{a^9b^{12}}=b\sqrt[12]{a^9}$

b) $\dfrac{\sqrt[4]{x^2y^3}\cdot\sqrt[6]{x^4y^6}}{\sqrt[10]{x^3y^2}}=\dfrac{\sqrt[12]{(x^2y^3)^3(x^4y^6)^2}}{\sqrt[10]{x^3y^2}}=\dfrac{xy\sqrt[12]{x^2y^9}}{\sqrt[10]{x^3y^2}}=xy\sqrt[120]{\dfrac{x^{20}y^{90}}{x^{36}y^{24}}}=xy\sqrt[60]{\dfrac{y^{33}}{x^8}}$

6.76 **Opera las siguientes fracciones algebraicas.**

a) $1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}}$

b) $2-\dfrac{1}{2-\dfrac{1}{2-\dfrac{1}{x}}}$

a) $1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}}=1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{\dfrac{x-1}{x}}}=1-\dfrac{1}{1-\dfrac{x}{x-1}}=1-\dfrac{1}{\dfrac{x-1-x}{x-1}}=1-\dfrac{x-1}{-1}=x$

b) $2-\dfrac{1}{2-\dfrac{1}{2-\dfrac{1}{x}}}=2-\dfrac{1}{2-\dfrac{1}{\dfrac{2x-1}{x}}}=2-\dfrac{1}{2-\dfrac{x}{2x-1}}=2-\dfrac{1}{\dfrac{4x-2-x}{2x-1}}=2-\dfrac{2x-1}{3x-2}=\dfrac{4x-3}{3x-2}$

6.77 **Calcula cuánto han de valer los números $A$ y $B$, para que se verifique la siguiente igualdad:**

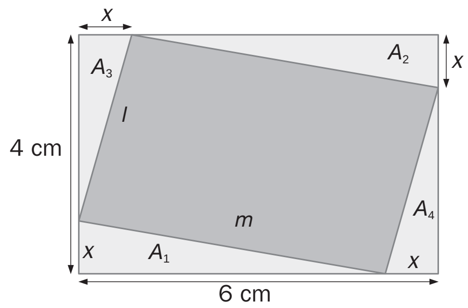
$$\frac{A}{x^2-3x}+\frac{B}{x^2}=\frac{3x-6}{x^3-3x^2}$$

$\dfrac{A}{x^2-3x}+\dfrac{B}{x^2}=\dfrac{Ax^2+B(x^2-3x)}{(x^2-3x)x^2}=\dfrac{(A+B)x-3B}{(x^2-3x)x}=\dfrac{3x-6}{x^3-3x^2}\Rightarrow\begin{cases}A+B=3\\3B=6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=1\\B=2\end{cases}$

6.78 **Escribe con un solo radical la siguiente expresión $x\sqrt{y\sqrt{z\sqrt[3]{t}}}$.**

$x\sqrt{y\sqrt{z^3\sqrt{t}}}=\sqrt{x^2y\sqrt{z^3\sqrt{t}}}=\sqrt{\sqrt{x^4y^2z^3\sqrt{t}}}=\sqrt[4]{x^4y^2z^3\sqrt{t}}=\sqrt[4]{\sqrt[3]{x^{12}y^6z^3t}}=\sqrt[12]{x^{12}y^6z^3t}$

**6.79** **Expresa el área del cuadrilátero coloreado, mediante un polinomio en *x*.**




**¿Cuánto miden los lados de dicho cuadrilátero?**

Para resolver el problema, le restaremos al área del rectángulo grande el área de los cuatro triángulos rectángulos, que son iguales dos a dos: $A_1 = A_2$ y $A_3 = A_4$.

$\textit{Área}\ (A_1) = \textit{Área}\ (A_2) = \dfrac{(6 - x)x}{2}$; $\textit{Área}\ (A_3) = \textit{Área}\ (A_4) = \dfrac{(4 - x)x}{2}$

$\textit{Área del rectángulo} = 4 \cdot 6 = 24\ \text{cm}^2$; $\textit{Área de la figura} = 24 - (6 - x)x - (4 - x)x = 2x^2 - 10x + 24\ \text{cm}^2$

El cuadrilátero es un paralelogramo, y, por tanto, tiene los lados iguales dos a dos.

Usamos el teorema de Pitágoras para calcular los lados *l* y *m* del paralelogramo:

$l = \sqrt{(4 - x)^2 + x^2} = \sqrt{2x^2 - 8x + 16}$ cm y $m = \sqrt{(6 - x)^2 + x^2} = \sqrt{2x^2 - 12x + 36}$ cm

**PARA INTERPRETAR Y RESOLVER**

**6.80 Población de aves**

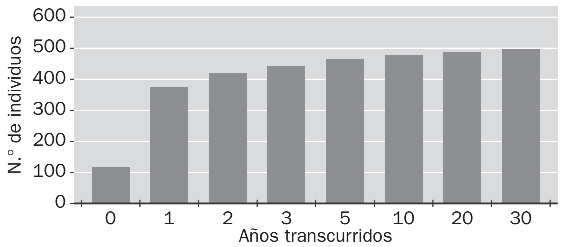
**En unas lagunas naturales de un espacio protegido por la ley se ha observado que el número de individuos de una cierta especie de aves se puede expresar mediante la fracción algebraica: $\dfrac{2\,000x + 250}{4x + 2}$ siendo $x$ el número de años que han transcurrido desde un año inicial $x = 0$.**

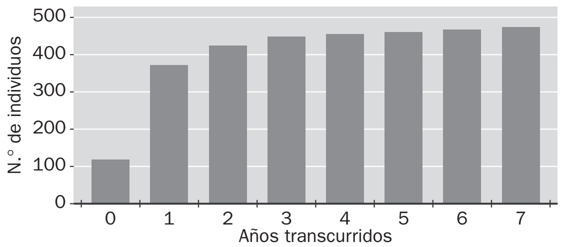
**a) Completa la tabla siguiente.**

| Años transcurridos | 0 | 1 | 2 | 3 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| Población | | | | | |

**b) Cuando hayan pasado muchos años, ¿qué población crees que habrá?**

**c) De los siguientes gráficos, ¿en cuál de ellos se aprecia mejor la contestación a la pregunta anterior?**




a)

| Años transcurridos | 0 | 1 | 2 | 3 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| Población | 125 | 375 | 425 | 446 | 482 |

b) La población tiende a estabilizarse en los 500 individuos.

c) El primer gráfico es mejor al contar con datos de años más separados del inicio.

## AUTOEVALUACIÓN

**6.A1 Reduce a común denominador estas fracciones.**

**a)** $\dfrac{1}{x^2-1}, \dfrac{1}{x+1}, \dfrac{1}{x^2+2x+1}$ **b)** $\dfrac{1}{x-1}, \dfrac{1}{x+2}, \dfrac{1}{x^2+x-2}$

a) $\dfrac{1}{x^2-1} = \dfrac{1}{(x+1)(x+1)} = \dfrac{x+1}{(x+1)^2(x+1)}$

$\dfrac{1}{x+1} = \dfrac{(x+1)(x-1)}{(x+1)^2(x-1)}$

$\dfrac{1}{x^2+2x+1} = \dfrac{1}{(x+1)^2} = \dfrac{x-1}{(x+1)^2(x-1)}$

b) $\dfrac{1}{x-1} = \dfrac{x+2}{(x-1)(x+2)}$

$\dfrac{1}{x+2} = \dfrac{x-1}{(x-1)(x+2)}$

$\dfrac{1}{x^2+x-2} = \dfrac{1}{(x-1)(x+2)}$

**6.A2 Opera los siguientes radicales.**

**a)** $\sqrt{18x} + \sqrt{50x} - \sqrt{32x} + \sqrt{98x}$

**b)** $\sqrt{a^3b^3} + \sqrt{ab^3} - 3\sqrt{a^3b^5} + 2\sqrt{ab}$

a) $\sqrt{18x} + \sqrt{50x} - \sqrt{32x} + \sqrt{98x} = \sqrt{9 \cdot 2x} + \sqrt{25 \cdot 2x} - \sqrt{16 \cdot 2x} + \sqrt{49 \cdot 2x} = 11\sqrt{2x}$

b) $\sqrt{a^3b^3} + \sqrt{ab^3} - 3\sqrt{a^3b^5} + 2\sqrt{ab} = \sqrt{a^2b^2ab} + \sqrt{b^2ab} - 3\sqrt{a^2b^4ab} + 2\sqrt{ab} = (ab + b - 3ab^2 + 2)\sqrt{ab}$

**6.A3 Realiza estas operaciones con fracciones algebraicas.**

**a)** $\dfrac{3x-2}{x-3} - \dfrac{2x-5}{x^2-9} + \dfrac{2x}{x+3}$ **b)** $\dfrac{x-1}{3x} \cdot \dfrac{5x^2}{x^2-x} : \dfrac{2}{x}$

a) $\dfrac{3x-2}{x-3} - \dfrac{2x-5}{x^2-9} + \dfrac{2x}{x+3} = \dfrac{(3x-2)(x+3) - (2x-5) + 2x(x-3)}{x^2-9} = \dfrac{5x^2-x-1}{x^2-9}$

b) $\dfrac{x-1}{3x} \cdot \dfrac{5x^2}{x^2-x} : \dfrac{2}{x} = \dfrac{(x-1) \cdot 5x^2 \cdot x}{3x \cdot (x^2-x) \cdot 2} = \dfrac{5x}{6}$

**6.A4 Simplifica las siguientes fracciones.**

**a)** $\dfrac{x^4+x^3-7x^2-x+6}{x^3+6x^2+11x+6}$ **b)** $\dfrac{x^3+3x^2+3x+2}{x^3-x^2-x-2}$

a) $\dfrac{x^4+x^3-7x^2-x+6}{x^3+6x^2+11x+6} = \dfrac{(x+1)(x-1)(x-2)(x+3)}{(x+3)(x+1)(x+2)} = \dfrac{(x-1)(x-2)}{x+2}$

b) $\dfrac{x^3+3x^2+3x+2}{x^3-x^2-x-2} = \dfrac{(x+2)(x^2+x+1)}{(x-2)(x^2+x+1)} = \dfrac{x+2}{x-2}$

**6.A5 Realiza las siguientes operaciones con expresiones radicales.**

**a)** $\sqrt[5]{xy^4} \cdot \sqrt[5]{x^2y} \cdot \sqrt[5]{xy}$ **b)** $\sqrt[3]{xy} \cdot \sqrt[4]{xy} : \sqrt[6]{xy}$

a) $\sqrt[5]{xy^4} \cdot \sqrt[5]{x^2y} \cdot \sqrt[5]{xy} = \sqrt[5]{xy^4x^2yxy} = y\sqrt[5]{x^4y}$

b) $\sqrt[3]{xy} \cdot \sqrt[4]{xy} : \sqrt[6]{xy} = (xy)^{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}} = (xy)^{\frac{5}{12}} = \sqrt[12]{(xy)^5}$

**6.A6 Halla el valor numérico de estas expresiones:** $\dfrac{3x^2y+1}{2x+1}$ $\sqrt{\dfrac{2xy-3}{xy}}$

**a) Para $x = 1$ e $y = 2$.**

**b) Para $x = -1$ e $y = -2$.**

a) $\dfrac{3 \cdot 1^2 \cdot 2 + 1}{2 \cdot 1 + 1} = \dfrac{7}{3}$

$\sqrt{\dfrac{2 \cdot 1 \cdot 2 - 3}{1 \cdot 2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

b) $\dfrac{3 \cdot (-1)^2 \cdot (-2) + 1}{(-2) \cdot 1 + 1} = \dfrac{-5}{-1} = 5$

$\sqrt{\dfrac{2 \cdot (-1) \cdot (-2) - 3}{(-1) \cdot (-2)}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

**6.A7 Simplifica los siguientes radicales.**

**a)** $\sqrt[12]{a^4b^8c^6}$

**b)** $\sqrt[18]{x^{12}y^{36}c^6}$

a) $\sqrt[12]{a^4b^8c^6} = \sqrt[6]{a^2b^4c^3}$

b) $\sqrt[18]{x^{12}y^{36}c^6} = \sqrt[3]{x^2y^6c}$

**6.A8 Comprueba si las fracciones** $\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+x-6}$ **y** $\dfrac{x-1}{x-2}$ **son equivalentes.**

$\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+x-6} = \dfrac{(x-1)(x+3)}{(x-2)(x+3)} = \dfrac{x-1}{x-2}$. Sí, son equivalentes porque son iguales.

**6.A9 Escribe dos expresiones radicales equivalentes a** $\sqrt[3]{x^2y}$**.**

Respuesta abierta, por ejemplo: $\sqrt[6]{x^4y^2}$, $\sqrt[12]{x^8y^4}$